

Über den magnetischen Formfaktor des Nukleons

Von H. EISENLOHR * und H. SALECKER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.
(Z. Naturforsch. 14 a, 699—707 [1959]; eingegangen am 6. April 1959)

This article deals with the form factor of the anomalous magnetic moment distribution of proton and neutron. It is first shown with three examples that the magnetic root mean square radius cannot be taken from the existing experiments with sufficient accuracy. Satisfactory agreement with the experimental results can be obtained with arbitrary values of r_m^2 . We calculate the magnetic moment form factors depending on the energy momentum transfer q^2 in perturbation theory and the 2π meson contribution to the isotopic vector form factor with dispersion relations also in relation to q^2 , with and without π meson form factor. We get better agreement of the shape of the form factor with the phenomenological form factor of HOFSTADTER at the expense of the static magnetic moment. But the contribution of the high q^2 values is still too large i. e. the structure is somewhat too concentrated **.

Die Experimente von HOFSTADTER und Mitarbb.¹ über die Streuung energiereicher Elektronen an Protonen und Deuteronen haben starke Abweichungen vom Verhalten punktförmiger Teilchen gezeigt. Macht man die Nukleonen für diesen Effekt allein verantwortlich², so erhält man für den mittleren quadratischen Radius der Ladungsverteilung und der Verteilung des anomalen magnetischen Moments für das Proton

$$\sqrt{r_{e,p}^2} \approx \sqrt{r_{m,p}^2} \approx (0.8 \pm 0.1) \cdot 10^{-13} \text{ cm} = a,$$

wobei die Gestalt der Verteilung durch eine Exponentialfunktion dargestellt werden kann. Etwa dieselben Ergebnisse bekommt man mit geringerer Genauigkeit auch für die anomale magnetische Momentverteilung des Neutrons und den zugehörigen mittleren quadratischen Radius $\sqrt{r_{m,n}^2}$ ³. Entsprechende Resultate liefert die Untersuchung der π -Mesonen-Erzeugung durch inelastische Elektron-Proton-Streuung⁴. Auch aus COMPTON-Streuexperimenten an Protonen können — zwar mit geringerer Genauigkeit — ähnliche Ergebnisse gefolgert werden⁵. Der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung des Neutrons scheint demgegenüber sehr

klein zu sein, wie man aus der Abwesenheit einer marklichen elektrostatischen Elektron-Neutron-Wechselwirkung schließen kann⁶.

An Hand dieses experimentellen Befundes ist mit Hilfe qualitativer und invarianztheoretischer Betrachtungen vermutet worden⁷, daß sich dahinter eine fundamentale Revision unserer gegenwärtigen Vorstellungen von der Wechselwirkung der Elementarteilchen, insbesondere der Elektrodynamik, andeutet, die vielleicht die Einführung nichtlokaler Felder notwendig mache oder gar unsere bisherigen Konzeptionen von Raum und Zeit bei kleinen Abständen erschüttere. In der Tat bewirkt eine geeignete Abänderung der Elektrodynamik eine entsprechende Reduktion der Wirkungsquerschnitte bei der Streuung von Elektronen an Elektronen⁸ und deshalb auch bei der Elektron-Nukleon-Streuung. Ebenso läßt die allgemein relativistische Behandlung der Quantentheorie wesentliche Abänderungen der bisherigen Theorie bei kleinen Abständen erwarten⁹. Jedoch zeigt sich bei näherem Zusehen, daß die letzteren Einflüsse erst bei viel kleineren Abständen merklich werden können als denjenigen, die bei den HOFSTADTERSchen Experimenten eine Rolle spielen.

* Sonthofen 3, Haus 9.

** Zusatz b. d. Korr.: Eine inzwischen durchgeführte verbesserte Berechnung des π -Meson-Formfaktors liefert für den magnetischen Formfaktor des Nukleons und das anomale magnetische Moment Übereinstimmung mit der Erfahrung innerhalb des experimentellen Fehlers.

¹ R. HOFSTADTER, F. BUMILLER u. M. R. YEARIAN, Rev. Mod. Phys. **30**, 482 [1958] und dort zitierte frühere Arbeiten.

² Der von HOFSTADTER festgestellte Ausdehnungseffekt könnte auch teilweise oder vollständig durch eine Abänderung der Elektrodynamik erklärt werden. Wegen der Diskussion dieser Möglichkeit vgl. S. D. DRELL, Ann. Physics **4**, 75 [1958] oder H. SALECKER, Phys. Verh. **8**, 161 [1957].

³ M. R. YEARIAN u. R. HOFSTADTER, Phys. Rev. **111**, 934 [1958].

⁴ W. K. H. PANOFSKY u. E. A. ALLTON, Phys. Rev. **110**, 1155 [1958].

⁵ H. SALECKER (erscheint demnächst); vgl. auch Phys. Verh. **9**, 98 [1958].

⁶ L. L. FOLDY, Rev. Mod. Phys. **30**, 471 [1958] und dort zitierte frühere Arbeiten.

⁷ D. R. YENNIE, M. M. LEVY u. D. G. RAVENHALL, Rev. Mod. Phys. **29**, 144 [1957].

⁸ H. SALECKER, Z. Naturforsch. **8a**, 16 [1953]; **10a**, 349 [1955].

⁹ L. D. LANDAU in „NIELS BOHR and the Development of Physics“, herausgegeben von W. PAULI, Pergamon Press, London 1955. — E. P. WIGNER, Rev. Mod. Phys. **29**, 255 [1957]. — H. SALECKER u. E. P. WIGNER, Phys. Rev. **109**, 571 [1958].



Aber auch die orthodoxe speziell-relativistische Mesontheorie liefert eine ausgedehnte Struktur der Nukleonen, da das Nukleon nach dieser Theorie immer von einer Wolke z. Tl. geladener virtueller Mesonen umgeben ist. Die Ausdehnung dieser Mesonenwolke liegt größtenteils zwischen der COMPTON-Wellenlänge des Nukleons

$$\hbar/M c \approx 0,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

und derjenigen des π -Mesons

$$\hbar/m_\pi c \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

d. h. der von HOFSTADTER gemessene mittlere quadratische Radius a fällt gerade in diesen Bereich. Dazu kommen noch die Wirkungen der virtuellen K-Mesonen, der Nukleon-Antinukleon-Paare usw., die ebenfalls eine innere Struktur des Nukleons erzeugen. Es erscheint deshalb notwendig, zunächst die Aussagen der Mesontheorie bezüglich der Nukleonenstruktur quantitativ zu prüfen, bevor weitreichende Abänderungen diskutiert werden.

Die hochenergetische Elektron-Proton-Streuung ist nach der Mesontheorie bereits frühzeitig theoretisch untersucht worden¹⁰. Merkwürdigerweise wurden die numerischen Ergebnisse von ROSENBLUTH nie mit den Experimenten verglichen, während seine allgemeine Streuformel zusammen mit phänomenologischen Formfaktoren ausgiebig benutzt wird. Niederenergetische elektromagnetische Struktureigenschaften der Nukleonen, wie z. B. die anomalen magnetischen Momente¹¹, die Neutron-Elektron-Wechselwirkung⁶ und neuerdings auch die mittleren quadratischen Radien, wurden mit Hilfe der mesontheoretischen Störungsrechnung ebenfalls frühzeitig berechnet. In neuerer Zeit wurden diese Größen auch im Rahmen der Mesontheorie mit Abschneideparametern¹², mit Dispersionsbeziehungen¹³ und mit speziellen Näherungen¹⁴ untersucht. Leider war es dabei ebenfalls nötig, sich bei allen Auswertungen der Formfaktoren auf die Energie-Impuls-Übertragung $q^2 = 0$, d. h. auf die statischen anomalen magnetischen Momente und auf die Ableitungen der Formfaktoren für $q^2 = 0$, d. h. auf die mittleren quadratischen Radien zu beschränken.

¹⁰ M. N. ROSENBLUTH, Phys. Rev. **79**, 615 [1950].

¹¹ B. D. FRIED, Phys. Rev. **88**, 1142 [1952] und dort zitierte frühere Arbeiten.

¹² H. MIYAZAWA, Phys. Rev. **101**, 1564 [1956]; R. G. SACHS u. S. B. TREIMAN, Phys. Rev. **103**, 435 [1956]; G. SALZMAN, Phys. Rev. **105**, 1076 [1957].

Theoretisch gesehen besteht die einfachste Aufgabe darin, die Formfaktoren des anomalen magnetischen Moments von Proton und Neutron zu berechnen. Die magnetischen Formfaktoren sind jedoch experimentell nur für größere Energie-Impuls-Übertragungen q^2 (etwa von $q^2 = 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ an) bekannt. Bei kleinem q^2 überwiegt die elektrische Streuung so sehr, daß nur der elektrische mittlere quadratische Radius r_e^2 eine wirklich beobachtbare Größe ist. HOFSTADTER hat die magnetischen Radien durch Extrapolation der magnetischen Formfaktoren nach kleinen q^2 hin erhalten. Da die genaue analytische Form von F_m natürlich nicht bekannt ist, kann diese Extrapolation in sehr verschiedener Weise ausgeführt werden, wie bereits von FEDERBUSH, GOLDBERGER und TREIMAN¹³ erwähnt worden ist. Wirklich beobachtbare Größen im Zusammenhang mit dem magnetischen Formfaktor G_m sind also nur die Werte für $q^2 = 0$, die die anomalen magnetischen Momente liefern, und der Verlauf von $G_m(q^2)$ für größere q^2 , die in die ROSENBLUTHSche Streuformel wesentlich eingehen.

In der vorliegenden Arbeit wird im ersten Abschnitt zunächst das theoretische Problem präzisiert. Dann werden 3 Beispiele für den magnetischen Formfaktor angegeben mit $\sqrt{r_m^2} = 0,4; 0,8; 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$, die im beobachtbaren Bereich innerhalb der Fehlergrenzen alle zu demselben F_m führen. Im zweiten Abschnitt werden die magnetischen Formfaktoren für beliebiges q^2 mit Hilfe der symmetrischen pseudoskalaren Mesontheorie in niedrigster Näherung der Störungsrechnung berechnet und in Gestalt eines Diagramms wiedergegeben, da sie in geschlossener Form analytisch nicht darstellbar sind. Es zeigt sich, daß besonders der magnetische Formfaktor des Neutrons bei großen q^2 gegenüber den Meßwerten viel zu groß ausfällt; aber auch der Formfaktor des Protons fällt bei größeren q^2 wesentlich zu schwach ab, während er bis etwa $q^2 = 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ gut mit den extrapolierten Werten von HOFSTADTER übereinstimmt, was nach unseren Ausführungen aber nicht als Bestätigung der Theorie für kleine q^2 angesehen werden kann. Auch der im Anschluß an CHEW, KARPLUS, GASIOROWICZ und ZACHA-

¹³ S. OKUBO, Nuovo Cim. **6**, 542 [1957]; K. TANAKA, Phys. Rev. **109**, 578; **110**, 1185 [1958] und Phys. Rev. (im Erscheinen); G. F. CHEW, R. KARPLUS, S. GASIOROWICZ u. F. ZACHARIASEN, Phys. Rev. **110**, 265 [1958]; P. FEDERBUSH, M. L. GOLDBERGER u. S. B. TREIMAN, Phys. Rev. **112**, 642 [1958].

¹⁴ S. GOTO u. S. MACHIDA, Prog. Theor. Phys. **20**, 216 [1958].

RIASEN¹³ mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen berechnete 2 π -Mesonen-Beitrag mit und ohne π -Mesonformfaktor fällt bei großen q^2 zu schwach ab, d. h. die zugehörigen Verteilungen sind zu konzentriert. Die Theorie ist also in jedem Falle nur qualitativ in Übereinstimmung mit der Erfahrung, während quantitativ häufig ein Unterschied um den Faktor 2 und mehr auftritt **. Im letzten Abschnitt wird deshalb eine phänomenologische Diskussion des magnetischen Formfaktors an Hand des experimentellen Materials gegeben. Wegen der großen experimentellen Unsicherheiten können jedoch auch auf diese Weise keine sehr definitiven Schlüsse gezogen werden, während sich beim elektrischen Formfaktor phänomenologisch etwas mehr aussagen lässt¹⁵.

Formfaktoren und experimentell bestimmbarer Größen

Bei der Streuung von Elektronen an Nukleonen kann man sich wegen der Kleinheit der Feinstrukturkonstante im Energiebereich bis zu 10⁹ eV auf die niedrigste Näherung in der elektrischen Wechsel-

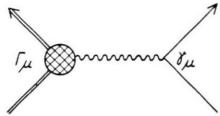


Abb. 1. FEYNMAN-Diagramm für die Streuung eines Elektrons an einem Nukleon, wobei die elektromagnetische Wechselwirkung in erster Näherung und die starke Wechselwirkung exakt berücksichtigt wird (Nukleonenlinie ==>, Elektronenlinie —————, Photonenlinie ~~~~~).

wirkung beschränken. Man erhält dann das FEYNMAN-Diagramm der Abb. 1, wobei die starke Wechselwirkung exakt berücksichtigt ist. Das zugehörige Matrixelement lautet ($\hbar = c = 1$)

$$M_{eN} = -i e (\bar{v}(p_N') \Gamma_\mu(p_N', p_N) v(p_N)) \quad (1)$$

$$\cdot q^{-2} (\bar{u}(p_e') \gamma_\mu u(p_e)).$$

Hier sind u der DIRACSche Spinor des Elektrons, v derjenige des Nukleons, p_e , p_e' , p_N , p_N' die Viererimpulse des Elektrons bzw. Nukleons vor bzw. nach dem Stoß, $q^2 = (p_e' - p_e)^2 = (p_N' - p_N)^2$ die Energie-Impuls-Übertragung und γ_μ die DIRACschen Matrizen. $\Gamma_\mu(p_N', p_N)$ ist der exakte renormierte Vertexoperator des Nukleons zwischen p_N und p_N' .

¹⁵ H. SALECKER (erscheint demnächst).

¹⁶ L. L. FOLDY, Phys. Rev. **87**, 688 [1952]; G. SALZMAN, Phys. Rev. **99**, 973 [1955]; A. C. ZEMACH, Phys. Rev. **104**, 1771

Wie von einer Reihe von Autoren gezeigt worden ist¹⁶, lässt sich der Nukleonanteil von (1) in der folgenden Weise schreiben

$$i \bar{v}(p_N') \Gamma_\mu(p_N', p_N) v(p_N) \quad (2)$$

$$= i \bar{v}(p_N') [G_e(q^2) \gamma_\mu - G_m(q^2) \sigma_{\mu\nu} q_\nu] v(p_N),$$

wobei G_e und G_m zwei invarianten Funktionen sind, die die innere Struktur der elektrischen Ladung und des anomalen magnetischen Moments des Nukleons beschreiben und die deshalb als Formfaktoren der Ladung und des anomalen magnetischen Moments bezeichnet werden. In der nichtrelativistischen Grenze sind die Formfaktoren die FOURIER-Transformierten der statischen Ladungs- bzw. Momentendichten

$$G(q^2) = \int \varrho(r) e^{iqr} dr. \quad (3)$$

Man sieht daraus, daß für $q^2 = 0$ $G_e(0) = Q$, d. h. gleich der Gesamtladung und $G_m(0) = \mu$ dem statischen anomalen magnetischen Moment ist. Also für Proton und Neutron

$$G_e^p(0) = e, \quad G_m^p(0) = \mu_p, \quad (4)$$

$$G_e^n(0) = 0, \quad G_m^n(0) = \mu_n$$

oder wenn man die Formfaktoren auf 1 normiert

$$G_e(q^2) = e F_e(q^2), \quad G_m(q^2) = \mu F_m(q^2) \quad (5)$$

außer $F_e^n(0) = 0$.

Mit (5) erhält man aus (1) für den Streuquerschnitt von Elektronen an Nukleonen die bekannte ROSENBLUTHSche Formel¹⁰

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \sigma_0 \left\{ F_e^2 + \frac{q^2}{4 M^2} \left[2(F_e + \mu F_m)^2 \tan^2 \frac{\delta}{2} + \mu^2 F_m^2 \right] \right\} \quad (6)$$

$$\text{mit } \sigma_0 = \left(\frac{e^2}{2 E_0} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^4 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2 E_0}{M} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$\text{und } q = \sqrt{1 + \frac{2 E_0}{M} \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Für kleine q^2 kann man die Exponentialfunktion in (3) entwickeln und bekommt dann

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \overline{r^2} q^2 \dots \quad (7)$$

$$\text{mit } \overline{r^2} = \frac{1}{G(0)} \int r^2 \varrho(r) dr = - \frac{6}{G(0)} \frac{dG(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}.$$

[1956]; A. I. AKHIEZER, L. N. ROSENZWEIG u. I. M. SHMUSHKEVICH, J. Exp. Theor. Phys., USSR **6**, 588 [1958].

$\bar{r^2}$ ist der mittlere quadratische Radius der betreffenden Verteilung.

Bei theoretischen Betrachtungen ist es meistens bequemer, statt der vier Funktionen G bzw. F für Proton und Neutron vier neue Funktionen mit

$$G = G^S + \tau_3 G^V \quad (8)$$

einzuführen, wobei τ_3 die der z -Komponente des isotopen Spinraumes zugeordnete Matrix ist, die den Eigenwert +1 für das Proton und -1 für das Neutron besitzt. G^S ist dann ein Skalar, G^V ein Vektor im isotopen Spinraum und

$$\begin{aligned} G_e^S(0) &= G_e^V(0) = \frac{e}{2}, \\ G_m^S(0) &= \mu_S = \frac{\mu_p + \mu_n}{2}, \\ G_m^V(0) &= \mu_V = \frac{\mu_p - \mu_n}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Für die mittleren quadratischen Radien gilt somit

$$\begin{aligned} \bar{r}_{e,p}^2 &= \frac{1}{2} (r_{e,S}^2 + r_{e,V}^2), \\ \bar{r}_{e,n}^2 &= \frac{1}{2} (r_{e,S}^2 - r_{e,V}^2), \\ \bar{r}_{m,p}^2 &= \frac{\mu_p + \mu_n}{\mu_p} \bar{r}_{m,S}^2 + \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p} \bar{r}_{m,V}^2, \\ \bar{r}_{m,n}^2 &= \frac{\mu_p + \mu_n}{\mu_n} \bar{r}_{m,S}^2 - \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_n} \bar{r}_{m,V}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Nicht alle der eben eingeführten Größen sind gleich gut beobachtbar. Aus der ROSENBLUTHSchen Streuformel (6) ersieht man, daß der erste Term die Winkel- und Energieabhängigkeit ($\sim 1/E^2$) besitzt, die für die Streuung an einem COULOMB-Feld charakteristisch ist, wenn man von der Abhängigkeit von F_e und F_m absieht. Der zweite Term dagegen ist fast konstant nahezu unabhängig vom Winkel und der Energie. Das bedeutet, daß man es bei kleinen Winkeln und kleinen q^2 hauptsächlich mit der Ladungsstreuung zu tun hat, während bei großen Winkeln die Streuung durch das anomale magnetische Moment überwiegt. Man kann also $F_m(q^2)$ für kleine q^2 , für die (7) gilt, nicht ohne weiteres bestimmen und damit auch nicht \bar{r}_m^2 . HOFSTADTER hat den Wert $a_m = 0.8 \cdot 10^{-13}$ cm für $\sqrt{\bar{r}_m^2}$ nur dadurch erhalten, daß F_m mit Hilfe der bei großen q^2 bestätigten exponentiellen Verteilung nach kleinen q^2 extrapoliert wurde.

In Abb. 2 zeigen wir mit Hilfe eines Beispiels, daß die experimentell bei größeren q^2 gefundenen Werte von F_m durch Formfaktoren mit sehr verschiedenen mittleren quadratischen Radien darge-

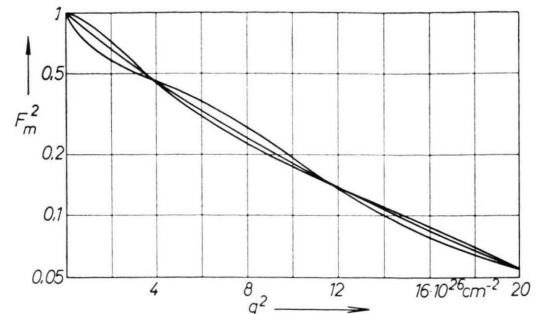


Abb. 2. Drei Formfaktoren, die für $q^2 \geq 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ innerhalb der Fehlergrenzen mit den Meßwerten übereinstimmen und die mittleren quadratischen Räden $\sqrt{\bar{r}^2} = 0,4; 0,8; 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ besitzen.

stellen werden können. Setzt man z. B.

$$F_m(q^2) = \frac{1}{\sqrt{(1+q^2 r_1^2)(1+q^2 r_2^2)(1+q^2 r_3^2)(1+q^2 r_4^2)}}, \quad (11)$$

so gilt für den mittleren quadratischen Radius

$$\bar{r}_m^2 = 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2). \quad (12)$$

Mit

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = r_4^2 = \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12} (0,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm})^2 \quad (13)$$

erhält man den von HOFSTADTER benutzten exponentiellen Formfaktor. Mit

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0601 + i \cdot 0,2842, & r_2 &= r_1^*, \\ r_3 &= -0,03345 + i \cdot 0,030896, & r_4 &= r_3^* \end{aligned} \quad (14)$$

wird dagegen nach (12)

$$\bar{r}_m^2 = (0,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm})^2, \quad (15)$$

während für $q^2 \geq 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ also im gemessenen Bereich innerhalb der Fehlergrenzen Übereinstimmung mit dem exponentiellen Formfaktor besteht. Setzt man aber

$$\begin{aligned} r_1 &= -0,03349, & r_2 &= 0,7080, \\ r_3 &= -0,07077 + i \cdot 0,09323, & r_4 &= r_3^*, \end{aligned} \quad (16)$$

so liefert (12)

$$\bar{r}_m^2 = (1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm})^2 \quad (17)$$

und ebenfalls für $q^2 \geq 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ Übereinstimmung mit dem exponentiellen Formfaktor innerhalb der Fehlergrenzen.

Der mittlere quadratische Radius \bar{r}_m^2 des magnetischen Formfaktors F_m ist also wenigstens nach der

bisherigen Bestimmungsmethode keine direkt mit der Erfahrung vergleichbare Größe. Zum sinnvollen Vergleich zwischen den Experimenten und den Aussagen der Theorie muß deshalb beim magnetischen Formfaktor der Verlauf für genügend große q^2 bestimmt werden.

Berechnung des magnetischen Formfaktors

Wir wollen nun den magnetischen Formfaktor für beliebiges q^2 zunächst in der symmetrischen pseudoskalaren Mesontheorie mit Hilfe der Störungsrechnung bestimmen. In niedrigster nicht verschwindender Näherung gibt es dabei folgende Diagramme zum Nukleonenvertex (außer den reinen Massenrenormierungstermen)

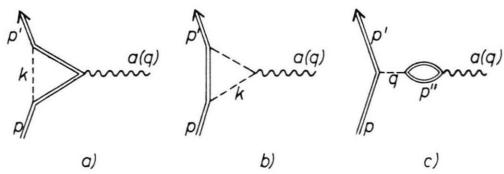


Abb. 3. FEYNMAN-Diagramme, die in niedrigster Näherung zum Nukleonenvertex von Abb. 1 beitragen (Mesonenlinie ——, übrige Linien wie in Abb. 1).

Im Diagramm a steht das elektromagnetische Feld direkt mit dem Nukleon in Wechselwirkung. Die vir-

tuelle Nukleonenlinie muß also immer ein Proton darstellen. Die virtuelle Mesonenlinie beschreibt deshalb ein neutrales bzw. ein negatives π -Meson, je nachdem das reelle Nukleon ein Proton oder ein Neutron ist. In der symmetrischen pseudoskalaren Mesontheorie ist nun die Emission bzw. Absorption eines geladenen π -Mesons um den Faktor $\sqrt{2}$ wahrscheinlicher als diejenige eines π^0 -Mesons (da das geladene Meson durch ein komplexes Feld, d. h. zwei reelle Felder beschrieben wird). Der Beitrag dieses Diagramms ist somit bei einem reellen Neutron doppelt so wahrscheinlich wie bei einem reellen Proton. Das Diagramm a gibt deshalb sowohl einen isotopen Skalar- als auch einen isotopen Vektorbeitrag. Im Diagramm b dagegen steht das elektromagnetische Feld mit dem virtuellen Meson in Wechselwirkung, das deshalb geladen sein muß. Wenn das reelle Nukleon ein Proton ist, dann ist das virtuelle Nukleon ein Neutron und das virtuelle Meson positiv geladen. Ist dagegen das reelle Nukleon ein Neutron, dann ist das virtuelle Nukleon ein Proton und das virtuelle π -Meson negativ geladen. Der Beitrag des Diagramms b ist also ein Vektor im isotopen Spinraum. Die Beiträge dieser Diagramme lassen sich nach der FEYNMANSchen Methode leicht angeben. Man erhält ($\hbar = c = 1$) mit den FEYNMANSchen Bezeichnungen, z. B. $\mathbf{p} = p_\mu \gamma_\mu$ ¹⁷

$$\begin{aligned} M_a &= i e g^2 \int d^4 k \bar{u}' \gamma_5 (\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{a}(q) (\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{M})^{-1} \gamma_5 u \frac{1}{k^2 - m_\pi^2}, \\ M_b &= -e g^2 \int d^4 k \bar{u}' \gamma_5 (\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{M})^{-1} \gamma_5 u \frac{(2\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{a}(q)}{(k^2 - m_\pi^2)[(k - q)^2 - m_\pi^2]}, \\ M_c &= i e g^2 \int d^4 p'' (\bar{u}' \gamma_5 u) \text{Sp} [\gamma_5 (\mathbf{p}'')^{-1} \mathbf{a}(q) (\mathbf{p}'') + \mathbf{q} - \mathbf{M})^{-1}] \frac{1}{q^2 - m_\pi^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Nach Renormierung wird

$$M_c = 0,$$

da in der Spur die Matrizenkombinationen $\gamma_5 \gamma_\mu$, $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu$, $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda$ vorkommen, deren Spuren sämtlich verschwinden. Die übrigen Terme können in der üblichen Weise behandelt werden¹⁷. Man erhält nach Renormierung für diejenigen Terme der Vertexfunktion in (2), die zum Formfaktor des anomalen magnetischen Moments beitragen

$$G_m^{p,n}(q^2) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3-\tau_3}{2} g_a(q^2) + \tau_3 g_b(q^2) \right] \mu_K, \quad (19)$$

wobei $\mu_K = (e/2M)$ das Kernmagneton und g die Kopplungskonstante des symmetrischen pseudoska-

laren Mesonfeldes bezeichnet. g_a enthält den Beitrag des virtuellen Nukleonenstromes (Diagramm a), g_b den Beitrag des virtuellen Mesonenstromes (Diagramm b)

$$\begin{aligned} g_a(q^2) &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{x^3}{x^2 + \left(\frac{m_\pi}{M}\right)^2 (1-x) + \frac{q^2}{4M^2} x^2 (1-y^2)}, \\ g_b(q^2) &= -2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{(1-x) x^2}{x^2 + \left(\frac{m_\pi}{M}\right)^2 (1-x) + \frac{q^2}{4M^2} (1-x)^2 (1-y^2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

¹⁷ R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 769 [1949].

Entsprechend der Diskussion im vorigen Abschnitt müssen beide Funktionen für beliebiges q^2 berechnet werden. Eine Integration läßt sich leicht analytisch ausführen; die andere muß dagegen numerisch durchgeführt werden. Das Ergebnis ist in Abb. 4

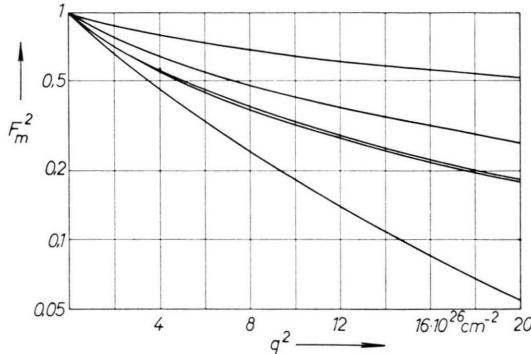


Abb. 4. Die Quadrate der Formfaktoren des anomalen magnetischen Moments von Proton (Mitte) und Neutron (oben) nach der mesontheoretischen Störungsrechnung als Funktion der Energie-Impuls-Übertragung q^2 . Die untere Kurve stellt den phänomenologischen exponentiellen Formfaktor von HOFSTADTER mit einem mittleren quadratischen Radius $\sqrt{r_m^2} = a = 0,8 \cdot 10^{-13}$ cm dar. Die Meßpunkte gelten für das Proton, wenn $F_e = F_m$. Der magnetische Formfaktor des Neutrons ist experimentell etwa von derselben Größe.

aufgetragen. Und zwar sind dort zum besseren Vergleich mit den Meßpunkten von HOFSTADTER und Mitarbb. die Quadrate der auf eins normierten magnetischen Formfaktoren von Proton und Neutron dargestellt worden.

$$\begin{aligned} F_m^p(q^2) &= \frac{g_a(q^2) + g_b(q^2)}{g_a(0) + g_b(0)}, \\ F_m^n(q^2) &= \frac{2 g_a(q^2) - g_b(q^2)}{2 g_a(0) - g_b(0)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Dazu wurde noch der phänomenologische Formfaktor von HOFSTADTER, der einer Exponentialverteilung entspricht, mit einem mittleren quadratischen Radius $a = \sqrt{r_m^2} = 0,8 \cdot 10^{-13}$ cm eingetragen.

$$F_m^{\text{phän}} = 1 / \left(1 + \frac{q^2 a^2}{12} \right). \quad (22)$$

Die Meßpunkte gelten für das Proton unter der Voraussetzung, daß der elektrische und der magnetische Formfaktor F_e^p und F_m^p gleich sind, was experimentell für 3 verschiedene q^2 mit einer Genauigkeit von etwa 20% nachgewiesen ist. Auch der magnetische Formfaktor des Neutrons ist experimentell von ungefähr derselben Größe, so daß wir schon hier feststellen können, daß der berechnete magne-

tische Formfaktor des Neutrons viel zu groß ausfällt. Die eingehende Diskussion wollen wir aber im nächsten Abschnitt durchführen und hier noch die weiteren Ergebnisse erwähnen.

Für $q^2 = 0$ erhält man nach (4) und (19) die magnetischen Momente von Proton und Neutron. Es ergeben sich genau die schon früher berechneten Ausdrücke¹¹, die wir deshalb nicht noch einmal angeben wollen. Das Endergebnis lautet

$$\mu_p = \frac{g^2}{4\pi} \frac{0,222}{2\pi} \mu_K, \quad \mu_n = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{1,644}{2\pi} \mu_K \quad (23)$$

oder nach (9)

$$\mu_S = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{0,711}{2\pi} \mu_K, \quad \mu_V = \frac{g^2}{4\pi} \frac{0,933}{2\pi} \mu_K. \quad (24)$$

Also für $(g^2/4\pi) \approx 15$

$$\mu_S = -1,7 \mu_K, \quad \mu_V = 2,4 \mu_K, \quad (25 \text{ a})$$

während dagegen experimentell

$$\mu_S^{\text{exp}} = -0,06 \mu_K, \quad \mu_V^{\text{exp}} = 1,85 \mu_K \quad (25 \text{ b})$$

gefunden wurde. Der isotope skalare Beitrag ist also viel zu groß. Läßt man den Beitrag des Nukleonenstromes (Diagramm a) ganz weg, so bleibt

$$\mu_V^b = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{2\pi} g_b(0) \mu_K = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{0,696}{2\pi} \mu_K \quad (26 \text{ a})$$

oder für $(g^2/4\pi) \approx 15$

$$\mu_V^b \approx 1,66 \mu_K, \quad (26 \text{ b})$$

was dem experimentellen Wert (25 b) recht nahe kommt.

Entwickelt man g_a und g_b nach Potenzen von q^2 und behält nur das erste Glied, so folgt

$$\begin{aligned} g_a &= 0,474 - \frac{2}{3} \frac{q^2}{4M^2} 0,455 \\ g_b &= -0,696 + \frac{4}{3} \frac{q^2}{4M^2} 1,901. \end{aligned} \quad (27)$$

Nach (7) und (21) erhält man daraus für die mittleren quadratischen Räden

$$\begin{aligned} \sqrt{r_{m,p}^2} &= 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \\ \sqrt{r_{m,n}^2} &= 0,36 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (28)$$

Der magnetische mittlere quadratische Radius des Protons stimmt gut mit dem aus experimentellen Daten extrapolierten Wert $a_m = 0,8 \cdot 10^{-13}$ cm überein. Dagegen ist derjenige des Neutrons nur etwa halb so groß. Wie wir aber bereits erwähnt haben, kommt dem magnetischen mittleren quadratischen

Radius keine direkte physikalische Bedeutung zu. Man muß vielmehr den gesamten Formfaktorverlauf mit den Meßwerten vergleichen.

In der letzten Zeit ist mehrfach versucht worden, die elektromagnetische Struktur der Nukleonen auch mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen zu untersuchen¹³, nachdem diese bei der π -Meson-Nukleon-Streuung und der Photoerzeugung von π -Mesonen¹⁸ erfolgreich gewesen sind. Insbesondere wurde eine Spektraldarstellung über die Massen σ der Zwischenzustände benutzt, die für $G_m^V(q^2)$ lautet¹³

$$G_m^V(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{(2m_\pi)^2}^{\infty} \frac{g_m^V(\sigma^2)}{\sigma^2 + q^2} d\sigma^2. \quad (29)$$

Da nach (25 b) $G_m^S(0) = \mu_S = -0,06 \mu_K$ sehr klein ist und wegen der ebenfalls experimentell bei größeren q^2 gefundenen angenäherten Gleichheit der magnetischen Formfaktoren von Proton und Neutron ist der isotopen Vektoranteil hier die interessanteste Größe. Die allgemeine Gestalt von (29) konnte bisher nur für die Störungsrechnung bewiesen werden¹⁹. In der Theorie sind jedoch Andeutungen dafür vorhanden, daß (29) nicht exakt gültig ist, sondern in der Nähe der unteren Grenze durch kleine zusätzliche Terme ergänzt werden muß. Der 2 π -Mesonenbeitrag (Abb. 5 a), der nur zum isotopen Vektoranteil beiträgt, läßt sich angenähert berechnen und führt zu

$$g_{m,2\pi}^V(\sigma^2) = \frac{e}{2M} f^2 \eta^4 \frac{\frac{x}{2} - 2}{\sqrt{x\left(\eta - \frac{x}{4}\right)^3}} \cdot \left[\operatorname{arc tg} y - \frac{3}{y} \left(1 - \frac{1}{y} \operatorname{arc tg} y\right) \right] \quad (30)$$

mit

$$\eta = \frac{M}{m_\pi}, \quad x = \frac{\sigma^2}{m_\pi^2}, \quad y = \frac{2\sqrt{\left(\frac{x}{4} - 1\right)\left(\eta^2 - \frac{x}{4}\right)}}{\frac{x}{2} - 1},$$

wenn man sich zunächst auf das einfachere Diagramm Abb. 5 b beschränkt, d.h. das π -Meson strukturiertlos (punktformig) annimmt und die nach Abb. 5 b übrigbleibende $\pi + \pi \rightarrow N + \bar{N}$ -Amplitude mit Störungsrechnung bestimmt (ganz entsprechend wie oben). Die numerische Integration von $4 m_\pi^2$ bis ∞ liefert die oberste Kurve in Abb. 6. Man sieht,

dass auch diese Berechnung immer noch viel zu große Werte für $G_m^V(q^2)$ für $q^2 \geq 3 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ ergibt, also ebenso wie die früheren Betrachtungen nur qualitativ mit der Erfahrung übereinstimmt. Der Vergleich mit den Ergebnissen der direkten störungstheoretischen Berechnung des Diagramms b in Abb. 3 g_b im letzten Abschnitt zeigt übrigens,

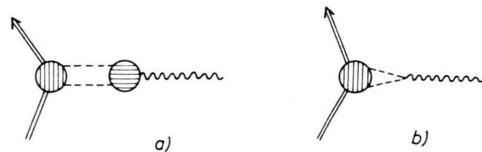


Abb. 5. Diagramme für den 2 π -Mesonenbeitrag zum Nukleonenvertex mit π -Mesonen-Formfaktor (a) und mit $F_\pi=1$ (b).

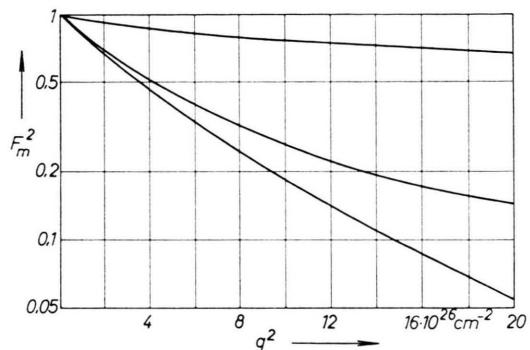


Abb. 6. Die Quadrate des isotopen Vektoranteils des magnetischen Formfaktors in Abhängigkeit von der Energie-Impulsübertragung q^2 nach dispersionstheoretischen Rechnungen. Die oberste Kurve stellt den 2 π -Mesonenbeitrag dar, wenn über die Massen aller Zwischenzustände von $4 m_\pi^2$ bis ∞ integriert wird. Die nächste Kurve zeigt $F_{m,2\pi}^V$, wenn die Integration bei $4 M^2$ abgeschnitten wird und die beiden sehr nahe beieinander liegenden Kurven zeigen $F_{m,2\pi}^V$ bei Berücksichtigung des π -Mesonen-Formfaktors (die obere davon bei Integration über den ganzen Bereich, die untere, wenn man bei $4 M^2$ abschneidet). Dazu ist wieder der phänomenologische Formfaktor von HOFSTÄDTER eingetragen (die unterste Kurve), der die Experimente gut wiedergibt.

dass die Resultate in beiden Fällen praktisch vollkommen gleich sind, was nach der Auswertungsmethode, die auf (30) führt, auch nicht verwunderlich ist. Diese Tatsache wird noch durch den Wert von

$$G_{m,2\pi}^V(0) = \mu^V \approx 1,6 \mu_K \quad (31)$$

im Vergleich zu (26 b) unterstrichen.

Interessanter sind die weiteren Kurven in Abb. 6. FEDERBUSH, GOLDBERGER und TREIMAN¹³ haben bemerkt, daß für $(2M)^2 \leqq \sigma^2$ eine obere Grenze der Beiträge von (30) zu (29) angegeben werden kann.

¹⁸ G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW u. Y. NAMBU, Phys. Rev. **106**, 1337, 1345 [1957].

¹⁹ Y. NAMBU, Nuovo Cim. (10) **9**, 610 [1958].

Das röhrt daher, daß der 2π -Mesonenbeitrag $g_{m,2\pi}^V$ (mit $F_\pi = 1$) gerade durch die Amplitude für die Erzeugung eines Nukleon-Antinukleonpaars durch 2π -Mesonen bestimmt ist. Für $(2M)^2 \leq \sigma^2$ befinden wir uns in dem Gebiet, in dem dieser Prozeß auch reell vorkommen kann, und hier sind die Amplituden durch die Unitaritätsbedingung nach oben begrenzt. Man findet¹³, daß der Beitrag dieses Bereichs ganz klein ist, so daß wir die Integration einfach bei $\sigma^2 = 4M^2$ abschneiden müssen. Wir erhalten dann für

$$G_m^V(0) = \mu^V \approx 0,85 \mu_K$$

in Übereinstimmung mit früheren Rechnungen¹³ und für den Verlauf von $F_m^V(q^2)$ in Abhängigkeit von q^2 , der noch nicht berechnet wurde, die zweite Kurve (von oben) in Abb. 6. Wie wir sehen, wird das magnetische Moment jetzt nur halb so groß wie beobachtet, während der Formfaktor zwar besser verläuft als vorhere, aber immer noch zu schwach abfällt für große q^2 .

Wir haben bisher das π -Meson als punktförmig angesehen, also seinen elektromagnetischen Formfaktor $F_\pi = 1$ gesetzt. Der 2π -Beitrag dazu wird durch die $\pi - \pi$ -Streuamplitude bestimmt, über die experimentell nichts bekannt ist. Es können deshalb nur theoretische Spekulationen darüber angestellt werden. FEDERBUSH, GOLDBERGER und TREIMAN¹³ haben F_π unter plausibel erscheinenden Annahmen über die $\pi - \pi$ -Streuung berechnet. Man hat dann (nach Abb. 5 a) das bisherige $g_m^V(\sigma^2)$ durch $\Re F_\pi(-\sigma^2) g_m^V(\sigma^2)$ zu ersetzen. Wenn wir dabei die eben erwähnte Berechnung von F_π benutzen¹³, so erhalten wir nach Integration die beiden sehr nahe beieinander liegenden Kurven in Abb. 6. Die untere entsteht, wenn wir entsprechend dem Unitaritätsargument in (29) nur von $4m_\pi^2$ bis $4M^2$ integrieren, die obere, wenn die Integration unbeschränkt durchgeführt wird. Da der Unterschied vernachlässigbar klein ist, wird die Unitaritätsbedingung jetzt insgesamt von selbst erfüllt. Wie man sieht, ist der Verlauf von F_m^V nun beträchtlich verbessert. Trotzdem fällt der Formfaktor immer noch zu schwach mit wachsendem q^2 ab, wie der Vergleich mit den Meßpunkten und der phänomenologischen Exponentialkurve zeigt. Dazu ist das anomale magnetische Moment

$$G_m^V(0) = \mu^V = 0,76 \mu_K,$$

d. h. nur knapp halb so groß wie der experimentelle

Wert. Die Berücksichtigung der elektromagnetischen Struktur des π -Mesons unterdrückt also die Beiträge der großen q^2 weitgehend und verstärkt den Einfluß der kleinen q^2 , was im Hinblick auf den Verlauf der Meßwerte eine sehr erwünschte Tendenz ist. Diese Wirkung ist aber nicht ausreichend, um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen **.

Natürlich können die Ausdrücke höherer Massenkonfigurationen ebenfalls beitragen. Diese sind für $q^2 = 0$ für die $2K$ -Mesonen- und die $N - \bar{N}$ -Beiträge abgeschätzt und als vernachlässigbar klein gefunden worden¹³, womit natürlich nichts über die Beiträge der höheren Massenkonfigurationen ausgesagt wird. Das letzte Ergebnis kann als wesentlicher Fortschritt gegenüber der Störungsrechnung angesehen werden, da wir nach (26) dort gerade den Nukleonenanteil weglassen mußten.

Diskussion

Wie wir bereits erwähnt haben, lassen sich die Experimente am besten dadurch beschreiben, daß für die magnetischen Formfaktoren von Proton und Neutron die Ausdrücke (22) gewählt werden, die einer exponentiellen Verteilung entsprechen mit dem mittleren quadratischen Radius

$$a_m = \sqrt{r_m^2} = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Es gilt daher

$$F_m^p \approx F_m^n \approx F_{\text{exp}}$$

und deshalb nach (8)

$$2G_m^V = G_m^p - G_m^n \approx (\mu_p - \mu_n) F_{\text{exp}} = 2 \cdot 1,85 \mu_K F_{\text{exp}}$$

sowie

$$\begin{aligned} 2G_m^S &= G_m^p + G_m^n \approx (\mu_p + \mu_n) F_{\text{exp}} \\ &= -2 \cdot 0,06 \mu_K F_{\text{exp}}. \end{aligned}$$

Die Gestalt des isotopen Vektoranteils ebenso wie des isotopen skalaren Anteils verläuft also nach den Experimenten etwa wie der Formfaktor der exponentiellen Verteilung. Dabei ist aber G_m^S wegen des sehr kleinen isotopen skalaren Bestandteils des magnetischen Moments $\mu_S = -0,06 \mu_K$ noch wesentlich unsicherer bestimmt als G_m^V . Störungstheoretisch hatten wir in Übereinstimmung mit früheren Rechnungen für $\mu_S = G_m^S(0) = -1,7 \mu_K$ einen viel zu großen Wert erhalten, während $\mu_V = G_m^V(0) = 1,66 \mu_K$ sich ungefähr richtig ergab, wenn man dazu nur den

Beitrag des Mesonenstromes (Diagramm 3 b) berücksichtige [mit $(g^2/4\pi) = 15$]. Man hat deshalb häufig den Beitrag des Nukleonenstromes einfach vernachlässigt. Dagegen haben wir gefunden, daß die Gestalt von F_m^p für nicht zu große q^2 ganz gut herauskommt, wenn man konsequent alle Beiträge der Störungsrechnung berücksichtigt (Abb. 4). Allerdings fällt F_m^p für große q^2 ebenfalls zu schwach ab, d. h. die Verteilung des anomalen magnetischen Moments ist zu konzentriert. Die Übereinstimmung des mittleren quadratischen Radius mit dem aus den experimentellen Daten extrapolierten Wert kann nicht als Stütze der Theorie angesehen werden, da diese Größe nicht direkt beobachtbar ist, wie wir an Hand von Beispielen (Abb. 2) gezeigt haben.

Das Interesse richtet sich deshalb darauf, den allein wesentlichen isotopen Vektoranteil, der bereits etwa das richtige anomale magnetische Moment ergibt, für große q^2 in verbesserter Weise zu berechnen. Dabei finden wir, daß dispersionstheoretische Rechnungen mit Einschluß des π -Mesonen-Formfaktors zwar den großen Unterschied zwischen dem störungstheoretischen Verlauf von $F_m^V(q^2)$ und den Experimenten verringern, aber für große q^2 immer noch einen zu schwachen Abfall geben (also eine zu konzentrierte Verteilung), während außerdem $G_m^V(0)$ nur noch etwa den halben beobachteten Wert für das anomale magnetische Moment liefert. Alle Versuche, die den Verlauf von $G_m^V(q^2)$ für große q^2 verbessern, verschlechtern gleichzeitig die Übereinstimmung mit dem statischen magnetischen Moment **. Natürlich ist auch die dispersionstheoretische Rechnung noch sehr verbessерungsbedürftig. FEDERBUSH, GOLDBERGER und TREIMAN haben versucht, Rückstreu-

korrekturen zu g_m^V zu berechnen. Dadurch wird das magnetische Moment wesentlich vergrößert. Das Verfahren ist aber so unsicher, wie die Autoren selbst festgestellt haben, daß man ihm keine beweisende Bedeutung beimesse kann. Außerdem sind die Rechnungen nur für $q^2 = 0$ durchgeführt worden. Insgesamt bleiben also die Verhältnisse auch hier wie in der Störungsrechnung bei einer qualitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung, während von einer quantitativen Übereinstimmung nicht gesprochen werden kann **. Natürlich deutet das nicht notwendig auf ein prinzipielles Versagen der Mesontheorie und damit der lokalen Feldtheorie; die niedrigste Näherung der Störungsrechnung ebenso wie der 2π -Mesonenbeitrag bei den dispersionstheoretischen Rechnungen sind ja nur die ersten Terme von unendlich vielen Beiträgen. Vielmehr weist vieles darauf hin (wie z. B. die statische Theorie von CHEW und LOW²⁰), daß für nicht zu große Energie-Impuls-Übertragungen q^2 eine quantitative Übereinstimmung mit der Erfahrung erzielt werden kann. Dazu scheint aber eine konsequente nichtstörungstheoretische und gleichzeitig relativistische Berechnungsmethode notwendig zu sein, wie bereits frühzeitig vermutet worden ist²¹.

Herrn Prof. F. BOPP (München) und Herrn Dipl.-Phys. T. ANDERS (Freiburg) danken wir für interessante Diskussionen und den Herren Prof. S. D. DRELL, Prof. R. HOFSTADTER und Prof. L. I. SCHIFF (Stanford) für die Übersendung zahlreicher Manuskripte vor der Veröffentlichung.

²⁰ G. F. CHEW, Phys. Rev. **94**, 1748, 1755; **95**, 1669 [1954]; F. E. LOW, Phys. Rev. **97**, 1392 [1955]; G. F. CHEW u. F. E. LOW, Phys. Rev. **101**, 1570 [1956].

²¹ H. SALECKER, Z. Naturforsch. **5a**, 480 [1950].